Закон Бернулли, кинетическая энергия и теория относительности.

Безверхний Владимир Дмитриевич.

Украина, e-mail: bezvold@ukr.net

Закон Бернулли гласит, что если вдоль линии тока жидкости давление повышается, то, как следствие, скорость течения жидкости убывает (и наоборот).

Обычная формула закона Бернулли такова:

$$(\rho * v^2)/2 + \rho * g * h + P = const$$

ρ - плотность жидкости;

v - скорость жидкости;

h - высота;

P - давление;

g - ускорение свободного падения.

Причем, первый член в уравнении - это кинетическая энергия единицы объема жидкости [1].

$$(\rho * v^2)/2$$

И тут возникает вопрос: почему возле первого члена стоит коэффициент 1/2?

Здесь необходимо пояснение. В этой же ссылке есть элементарный вывод уравнения Бернулли из закона сохранения энергии, и естественно, используется формула кинетической энергии (отсюда и коэффициент).

Кинетическая энергия по определению, есть разница между полной энергией тела и энергией покоя (согласно СТО Эйнштейна) [2].

$$T = (m * c^2) / (1 – v^2/c^2)^{0.5} - (m * c^2)$$

Естественно, полная энергия зависит от релятивистской массы тела, которая увеличивается с ростом скорости.

Но, изменение массы может быть разным, так как есть поперечная (v↑, a→) и продольная масса (v→, a→) – есть “…различие инертных свойств тела в отношении ускорений по направлению скорости и перпендикулярно ей… инертность частицы в направлении скорости (продольная масса) больше, чем перпендикулярно скорости (поперечная масса)…” [3].

Поперечная масса:

$$m (v\uparrow, a\rightarrow) = m / (1 – v^2/c^2)^{0.5}$$

Продольная масса:

$$m\ (v\rightarrow,\ a\rightarrow) = m\ /\ (1 – v^2/c^2)^{1.5}$$

Так как в законе Бернулли скорость потока и сила/давление совпадают по направлению, то кинетическая энергия будет равна (v→, a→):

$$T = (3 * m * v^2)/2$$

$$(\ T = (m * c^2)\ /\ (1 - v^2/c^2)^{1.5} - (m * c^2)\ )$$

Значит, в уравнении Бернулли около первого члена должен стоять коэффициент 3/2.

$$(3 * \rho * v^2)/2$$

Объяснение. Кинетическая энергия может быть разложена в ряд Маклорена (полная энергия минус энергия покоя), поэтому в зависимости от массы (поперечной, продольной) будут разные коэффициенты: 1/2 или 3/2.

Продемонстрируем разложение в ряд Маклорена для этих двух случаев, так как классическая формула для кинетической энергии – это просто первый член разложения в ряд Маклорена (когда (v↑, a→)).

$$T = (m * v^2)/2$$

В нашем случае имеем две подобные формулы:

1. $(1 – v^2/c^2)^{(-1/2)}$

(Из формулы $m\ (v\uparrow,\ a\rightarrow) = m\ /\ (1 – v^2/c^2)^{0.5} = m * (1 – v^2/c^2)^{(-1/2)}$)

2. $(1 – v^2/c^2)^{(-3/2)}$

(Из формулы $m\ (v\rightarrow,\ a\rightarrow) = m\ /\ (1 – v^2/c^2)^{(3/2)} = m * (1 – v^2/c^2)^{(-3/2)}$)

Поэтому при разложении в ряд по Маклорену получаем.

1-й случай (v↑, a→).

$$(1 – v^2/c^2)^{(-1/2)} = 1 + v^2/(2 * c^2) + (3 * v^4)/(8 * c^4) + (5 * v^6)/(16 * c^6) + \ldots$$

Тогда, выражение для кинетической энергии в 1-м случае следующее.

$$T = (m * c^2) * (1 – v^2/c^2)^{(-1/2)} - (m * c^2) = (m * c^2) * ((1 – v^2/c^2)^{(-1/2)} - 1)$$

$$T = (m * v^2)/2 + (3 * m * v^4)/(8 * c^2) + (5 * m * v^6)/(16 * c^4) + \ldots$$

Если учтем только первый член разложения (скорость намного меньше скорости света), то получим классическую формулу для кинетической энергии:

$$T \approx (m * v^2)/2$$

2-й случай (v→, a→).

$$(1 - v^2/c^2)^{(-3/2)} = 1 + (3 * v^2)/(2 * c^2) + (15 * v^4)/(8 * c^4) + (35 * v^6)/(16 * c^6) + \ldots$$

Поэтому, для 2-а случая получим формулу для кинетической энергии с другими коэффициентами.

$$T = (m * c^2) * (1 - v^2/c^2)^{(-3/2)} - (m * c^2) = (m * c^2) * ((1 - v^2/c^2)^{(-3/2)} - 1)$$

$$T = (3 * m * v^2)/2 + (15 * m * v^4)/(8 * c^2) + (35 * m * v^6)/(16 * c^4) + \ldots$$

Учтем только первый член разложения (скорость намного меньше скорости света):

$$T \approx (3 * m * v^2)/2$$

Если для кинетической энергии учтем первый член разложения в ряд, то тогда, первый член уравнения Бернулли должен иметь коэффициент 3/2.

$$(3 * \rho * v^2)/2$$

С учетом нового коэффициента, закон Бернулли запишется в виде:

$$(3 * \rho * v^2)/2 + \rho * g * h + P = const$$

В конце отмечу, что именно закон Бернулли объясняет, почему в узкой части трубы скорость течения жидкости выше, а давление меньше, чем на участке трубы большего диаметра [4].

1. Bernoulli's principle. Wikipedia (ru). https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli%27s_principle

2. Kinetic energy. Wikipedia (ru). https://en.wikipedia.org/wiki/Kinetic_energy

3. Matveev A. N. Mechanics and Theory of Relativity. Textbook for students 3rd edition Moscow, “ONIKS 21 Century” Publishing House, “Mir and Education” Publishing House, 2003. Pages 137-138.

4. Venturi effect. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Venturi_effect